Игра в кварки

А. Балакин, Ю. Петрова, М. Скопенков

http://skopenkov.ru/courses/quarks-17.html

В этом курсе в элементарной игровой форме мы познакомимся с важными идеями теории поля, описыващей взаимодействия элементарных частиц. Это позволит понять не только физику, но и такие разделы математики, как дифференциальная геометрия и комплексный анализ. Для каждой изучаемой теории, каждого нового понятия мы постараемся показать, как они естественно возникают при решении практических задач, к каким задачам применяются дальше. Благодаря этому большинство объектов становятся наглядными и простыми.

Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Никаких предварительных знаний физики не требуется. Первые занятия доступны школьникам.

Примерная программа.

1. Игрушечная модель калибровочной теории на решетке: обмен товарами между городами. Связь с магнитным полем. Квантование: случайные курсы обмена товарами. Точное решение 1- и 2-мерной калибровочной теории на решетке. Численные эксперименты в размерности 3 и 4. Пример неабелевой калибровочной теории. Удержание кварков. Суть проблемы о решении уравнения Янга-Миллса (одной из "проблем тысячелетия"). Механизм Хиггса*.

2. Математическая модель электрической цепи - простейшая модель теории поля на решетке. Существование и единственность потенциала в электрической цепи. Принцип максимума. Сохранение энергии. Вариационный принцип. Магнитное поле. Связь с игрушечной калибровочной теорией. Дискретные гармонические и дискретные аналитические функции. Электромагнитное поле*. Дискретные уравнения Максвелла*.

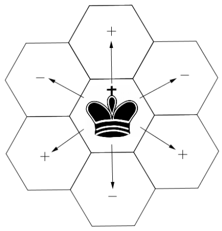
3. Шашки Фейнмана - простейшая модель электрона. Спин. Дискретное уравнение Дирака.* Сходимость шашек Фейнмана к теории Дирака*.

Список литературы

[1] J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, Europ.J.Phys.37:1(2016),https://arxiv.org/abs/1410.6753

[2] M. Creutz, Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge Univ. Press, 1983 - Science - 169 pp.

1. Плоскость разбита на клетки в виде правильных шестиугольников. За ход король перемещается на любую соседнюю клетку, см. рисунок. Ходы вверх, вправо-вниз и влево-вниз назовем *положительными*, остальные — *отрицательными*. Король сделал несколько ходов и вернулся на исходную клетку. Чему может быть равна разность между числом положительных и отрицательных ходов?



Эта незатейливая математическая задача имеет фундаментальное физическое следствие: *заряд любой свободной частицы кратен заряду электрона.* Хотите увидеть, как школьная математика помогает понять физику частиц? Читайте дальше! Знаний физики не потребуется, мы дадим всю необходимую информацию. Начнем с неформального введения; математические определения появятся после задачи 9.

Элементарные частицы и места их обитания[1]

Вещество состоит из атомов, атомы — из ядра и электронов, ядра — из протонов и нейтронов.


-протон-

Все это *частицы* вещества. Частицы бывают *элементарные* и *составные*, т.е., состоящие из других частиц. Так, протон состоит из двух u-кварков и одного d-кварка, а сами кварки уже элементарны; см. рисунок. Для наших целей неважно, *что* такое кварки; можно представлять себе просто клейкие шарики, которые слипаются, образуя другие частицы.

Если в эксперименте частица отделена от всех остальных (т.е. движется независимо от них), то она называется *свободной.* Так, обычно нейтрон содержится в ядре, но может стать свободным в ходе ядерной реакции. Эта подборка задач об *удержании кварков* (основные задачи— 11,27,32.b):

Кварки не бывают свободными.

Это значит нечто парадоксальное: кварки существуют, но их в принципе невозможно наблюдать в эксперименте. Мы обсудим как причины, так и следствия этого (пока не доказанного) утверждения[2].

Каждая частица имеет *заряд.* Так, заряд электрона равен -1 (таков выбор единиц измерения), заряд u-кварка равен $+2/3$. Заряд составной частицы равен сумме зарядов составляющих. Так, заряд протона равен $+1$.

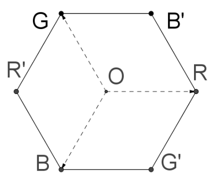
Каждая частица имеет *античастицу* с противоположным зарядом. Так, заряд u-антикварка равен $-2/3$.

Список всего нескольких из известных кварков и свободных составных частиц приведен в таблице.

частица				античастица			
название	обозначение	состав	заряд	название	обозначение	состав	заряд
Элеметнарные частицы: кварки (слева) и антикварки (справа)							
u-кварк	u	-	$+2/3$	u-антикварк	$\bar{u}$	-	$-2/3$
d-кварк	d	-	$-1/3$	d-антикварк	$\bar{d}$	-	$+1/3$
Составные частицы из кварка и антикварка							
пион	π^+	$u\bar{d}$	$+1$	пион	π^-	$\bar{u}d$	-1
Составные частицы из 3 кварков (слева) или 3 антикварков (справа)							
протон	p	uud	$+1$	антипротон	$\bar{p}$	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	?
нейтрон	n	?	0	антинейтрон	$\bar{n}$	?	?

2. Заполните клетки таблицы, в которых стоят знаки вопроса.

Каждая частица еще имеет *цвет* (со светом он никак не связан). Это уже не число, а вектор на плоскости. В дальнейшем будем считать, что $RB'GR'BG'$ — правильный шестиугольник с центром в начале координат O. Кварк может иметь один из цветов $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OB}$ (“красный”, “зеленый”, “синий”). Т.е. на самом деле, существует 3 разных u-кварка и 3 разных d-кварка.



[1]Это только изложение общепринятой теории и *не* претендует на истину в последней инстанции.

[2]Доказательство одного очень близкого утверждения составляет одну из Проблем Тысячелетия, сущность которой мы тоже постараемся объяснить.

Цвет античастицы противоположен цвету частицы. Так, античастица красного u-кварка имеет цвет $\overrightarrow{OR'}$ ("бирюзовый"). Цвет составной частицы — это векторная сумма цветов составляющих. Например, протон, состоящий из красного u-кварка, зеленого u-кварка и синего d-кварка, имеет нулевой цвет. Настоящая причина пленения кварков — это *удержание цвета*:

Частицы ненулевого цвета не бывают свободными.

Для разминки обсудим простейшие следствия пленения цвета.

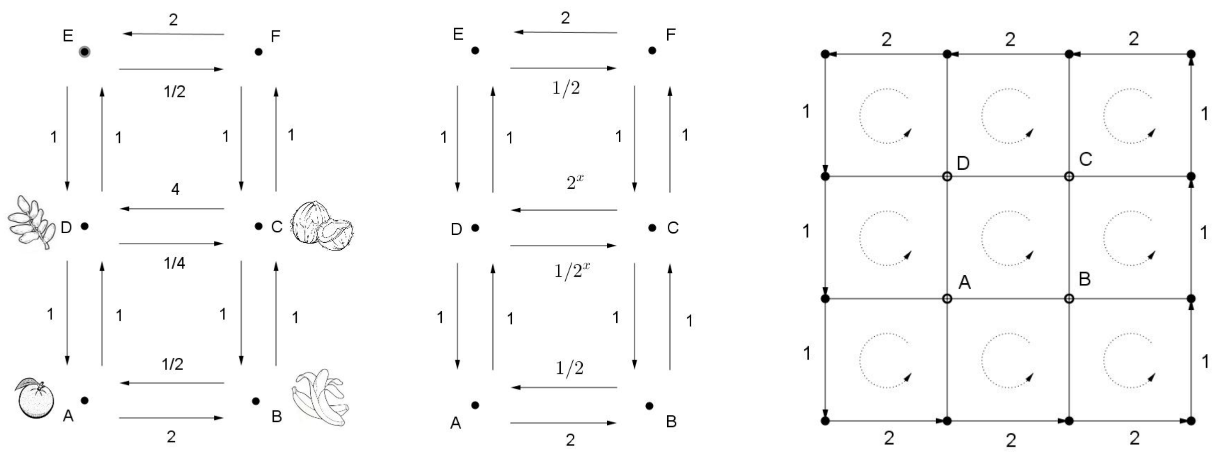
3. a) Для каких q и p с условием $p+q \leqslant 3$ есть частица нулевого цвета из q кварков и p антикварков[3]?

b) Докажите, что каждая частица нулевого цвета, состоящая из кварков и антикварков, указанных в таблице выше, обязательно имеет целочисленный заряд.

Начнем наш путь к пониманию причин пленения цвета. Нам потребуется теория, описывающая взаимодействие кварков. Все известные взаимодействия, кроме гравитации, описываются *калибровочной теорией*. Это касается не только кварков, но и каждодневных явлений, вроде примагничивания проводников с током. Как мы сейчас увидим, *идея* калибровочной теории очень проста.

Игрушечная модель калибровочной теории

Несколько городов соединены дорогами в форме решетки $M \times N$; см. рисунок. В каждом городе свои товары (в неограниченном количестве). Например, в городе A — апельсины, в городе B — бананы. Для пары соседних городов A и B фиксирован курс обмена $U(AB) > 0$, например, 2 банана за апельсин. Курс симметричен, т.е. $U(BA) = U(AB)^{-1}$: за 2 банана получаем назад свой апельсин.



Хитрый горожанин может проехать вокруг квадрата $ABCD$ размера 1×1, меняясь по пути, в результате чего его начальный запас товаров умножится на $U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$. Так, на рисунке слева он получит 8-кратную прибыль. Обозначим $U(ABCD) := U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$.

Как мы увидим, удобнее рассматривать *логарифмы* этих множителей. Все, что понадобится знать о логарифмах, это следующее определение. Если $y = 2^x$ для действительных x и y, то x называется *логарифмом* числа y и обозначается $x = \log_2 y$. Так, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $\log_2 1 = 0$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

В частности, путешествие вокруг квадрата $ABCD$ в том или ином направлении даст прибыль, если $\log_2 U(ABCD) \neq 0$. *Общий доход от спекуляций* измеряется суммой $S[U]$ величин $\log_2^2 U(ABCD)$ по всем квадратам $ABCD$ размера 1×1 (обходятся они против часовой). Так, на рисунке слева

$$S[U] = \log_2^2 U(ABCD) + \log_2^2 U(DCFE) = (\log_2 8)^2 + (\log_2 \tfrac{1}{2})^2 = 10.$$

Вы — король и можете устанавливать курсы обмена везде, кроме границы решетки. Вы устанавливаете их, чтобы минимизировать величину $S[U]$. Полученные курсы назовем *оптимальными*.

4. Наведите порядок в королевстве на рисунке слева, т.е. подберите значение x, для которого минимален общий доход от спекуляций на рисунке в центре.

Оптимальные курсы обмена можно найти приближенно на компьютере, перебирая с маленьким шагом все возможные курсы из некорого интервала и сравнивая соответствующие значения $S[U]$.

5. Сделайте это для королевств на рисунках в центре и справа. А есть ли более быстрый алгоритм?

[3]Кварков может быть и больше: частицы из 4 кварков и антикварков были открыты в 2014, из 5 — в 2015.

Заметим, что замена переменных $x(AB) := \log_2 U(AB)$ сильно упрощает выражение для дохода:

$$S[x] := \sum_{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1\times 1} (x(AB)+x(BC)+x(CD)+x(DA))^2.$$

Для квадрата $ABCD$ размера 1×1 обозначим $x(ABCD) := x(AB)+x(BC)+x(CD)+x(DA)$. Так, на рисунке слева $x(ABCD) = 3$. Обозначим через W множитель, на который умножится запас товаров при путешествии по границе всей решетки против часовой стрелки. Так, на рисунке слева $W = 4$.

6. Предположим, что фиксированные курсы обмена на границе такие, как на рисунке на стр. 3, т.е.

$$U(AB) = \begin{cases} 2, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит северной или южной границе решетки} \\ & \text{и направлена против часовой стрелки вдоль границы;} \\ 1, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит восточной или западной границе решетки.} \end{cases}$$

Наведите порядок в королевстве для следующих размеров решетки, т.е. заполните таблицу:

Решетка	1×2	1×3	$1\times N$	2×2
Величина W Минимальное значение $S[U]$ Оптимальные курсы для всех дорог Величины $x(AB)$ для всех дорог AB Величины $x(ABCD)$ для квадратов	4			

7. a) Для каких значений курса обмена на границе решетки $M\times N$ можно достичь равенства $S[U]=0$?
b)* Пусть $S[U] = 0$. Может ли горожанин получить прибыль, двигаясь по замкнутому пути?
c) Для каких значений M и N оптимальные курсы однозначно определяются курсами на границе?
d) Как связаны M, N, W и минимальный доход от спекуляций?
e) Какая из решеток — 8×8 или 7×9 — дает меньший доход от спекуляций при одинаковом W?

8. Пусть теперь разрешено менять курсы обмена на границе. Какое минимальное значение величины

$$\tfrac{1}{2}S[U] - j\log_2 W$$

можно получить для данного вещественного числа j на решетке $M\times N$?

Физическая интерпретация

Наша игрушечная модель позволяет описать магнитное взаимодействие проводников с током.

Пусть дано вещественное число j. Граница решетки — это рамка с током силы j. Ток в рамке создает магнитное поле. Величина $x(ABCD)$ для квадрата $ABCD$ размера 1×1 — это *магнитный поток* через квадрат, сумма $\frac{1}{2}S[x]$ — это *энергия магнитного поля*, а $\frac{1}{2}S[x]-j\log_2 W$ — *общая энергия* системы. Всякая система стремится минимизировать энергию. Поэтому величины $x(AB)$ выбираются так, чтобы минимизировать величину $\frac{1}{2}S[x] - j\log_2 W$. (Осторожно: это грубая модель!)

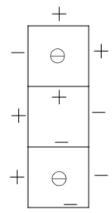
Если расположение проводников не фиксировано, то проводники стремятся сдвинуться так, чтобы общая энергия уменьшилась. Это означает притяжение или отталкивание проводников. При этом движение проводников понимается как изменение количества клеток в решетке, а не размера клеток.

9. a) Стремится ли рамка с током уменьшить или увеличить свою площадь?
b) Притягиваются или отталкиваются два проводника с противоположно направленными токами?
c)* А если направления токов совпадают?
Указание. Замкните проводники вдалеке, чтобы получилась рамка (для b)) или 2 рамки (для c)).

Взаимодействие кварков описывается *квантовой* калибровочной теорией. Ее главное отличие в том, что курсы обмена становятся *случайными* и не обязательно положительными. Для простоты будем считать, что курсы обмена принимают всего два значения: $+1$ и -1, а коротко: "+" и "−". Обход по границе квадрата меняет запас товаров, если на его границе нечетное число знаков "−".

Пришло время для точных математических формулировок. Сначала мы сформулируем нашу новую модель, затем пару задач, и только после этого постепенно дадим все необходимые определения.

Игрушечная модель квантовой калибровочной теории



Рассмотрим клетчатую полосу $1 \times N$; см. рисунок. Каждой из сторон квадратов 1×1 случайным образом сопоставим знак "+" или "−" (так, что все расстановки знаков имеют одинаковую вероятность; определение *вероятности* см. перед задачей 12). Для расстановки U обозначим через $S'[U]$ количество квадратов 1×1, на сторонах которых нечетное число знаков "−". Например, на рисунке $S'[U] = 2$. Математическое ожидание случайной величины $S'[U]$ назовем *энергией* $E(N)$ *электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии* N. (Определения *случайной величины* и *математического ожидания* см. перед и после задачи 17.)

Замечание. Последний термин — неделимый; слова 'кварк', 'антикварк', 'электромагнитное взаимодействие' не имеют формального смысла по-отдельности. Осторожно: модель крайне грубая!

10. Найдите энергию $E(N)$ для полосок размера: 1×1; 1×2; 1×3; $1 \times N$;
a) приближенно с помощью компьютерной симуляции; b) точно.

11. (Удержание кварков в 1-мерном пространстве.) Существует ли такое число E_0, что $E(N) \leqslant E_0$ для каждого N? (То же неформально: конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести кварк и антикварк очень далеко друг от друга?)

Классическая вероятность[4]

Знакомство с теорией вероятностей полезно начинать на «физическом» уровне строгости, как в книгах [Shen], [KZhP]. Здесь же мы сразу даём «математические» определения. Однако мы приводим многие задачи на «практическом» языке и показываем на примерах, как их формализовать. Формализацию остальных задач оставляем читателю. Такая формализация является первым шагом решения, от которого может зависеть ответ.

Рассмотрим эксперимент, имеющий m равновозможных исходов, например бросание игральной кости, вытаскивание карты из колоды и т. д. Если интересующее нас событие (например, выпадение шестёрки, вытаскивание туза и т. д.) происходит в a из этих исходов, то *вероятность* события считают равной $p = a/m$.

Это пояснение полезно для начинающего, но не является математическим определением. Вот математическое определение.

Вероятностью подмножества A конечного множества M называется число

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Далее, если не оговорено противное, множество M фиксировано и пропускается из обозначений. Тогда вероятность определена для всех его подмножеств. Их часто называют *событиями.*

12. Из колоды в 52 карты вытаскивается одна карта. Найдите вероятность того, что она окажется
(a) чёрной масти; (b) тузом; (c) картинкой;
(d) дамой пик; (e) королём или бубной.

Например, в задаче 12 (c) множество M («всех возможных исходов») совпадает с множеством карт в колоде, а множество A («исходов, в которых происходит рассматриваемое событие») — с множеством картинок. Так эта и многие другие вероятностные задачи могут быть строго сформулированы на комбинаторном языке.

13. Монета бросается 3 раза. Найдите вероятность выпадения
(a) трёх орлов; (b) двух орлов и решки.

Для решения некоторых из вышеприведённых задач полезны следующие.

14. (a) *Правило сложения.* Пусть $A \cap B = \emptyset$. Выразите $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$.
(b) Выразите вероятность $P(A \cup B)$ через $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.
(c) *Правило умножения.* Выразите вероятность $P_{M \times N}(A \times B)$ через $P_M(A)$ и $P_N(B)$.

[4] Данный раздел с небольшими изменениями заимствован из книги [EMZ].

15. a) Сторонам квадрата случайно сопоставлены знаки "+" и "−". Какова вероятность, что общее количество знаков "−" нечетно?

b) Какова вероятность, что для полоски 1×2 выполнено $S'[U] = 0$? А $S'[U] = 1$? А $S'[U] = 2$?

Следующая задача подводит к понятиям *случайной величины* и *математического ожидания*.

16. a) Вам предлагается такая игра. Вы платите 2 конфеты, затем бросается игральная кость, и вы получаете столько конфет, сколько очков выпадает. Выгодна ли вам эта игра?

b) Правила те же, только в случае выпадения 1 очка вы платите 100 конфет. (У вас достаточно конфет, чтобы заплатить.) Выгодня ли вам эта игра?

c) Банк предлагает вам стабильный доход совершенно бесплатно. Вы кладете в банк 8 конфет, после чего бросается игральная кость. Если выпадает 2, 3 или 4 очка, то вы получаете назад свой вклад плюс еще 1 конфету вдобавок. Если выпадает 5 или 6 очков ("рост рынка"), то вы получите даже плюс 2 конфеты вдобавок[5]. Выгодна ли вам эта игра?

Числовая функция X, заданная на M, называется *случайной величиной*. Множество пар (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots$, где $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество возможных значений случайной величины X, а $p_i = P(\{m \in M \colon X(m) = x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots,$ — соответствующие им вероятности, называется *распределением* случайной величины X. Событие $\{m \in M \colon X(m) = x_i\}$ в дальнейшем сокращённо обозначается $X = x_i$.

17. Найдите распределение случайной величины $S'[U]$ для полоски 1×2.

Математическим ожиданием или *средним значением* случайной величины X называется сумма

$$\mathrm{E}(X) := \sum x_i p_i = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots.$$

18. Найдите математическое ожидание случайной величины $S'[U]$ для полоски 1×2.

Договоримся вместо знака "+" писать $+1$, а вместо знака "−" писать -1. Пусть случайная величина X_k равна произведению чисел на сторонах k-го сверху квадрата 1×1 в полоске $1 \times N$, а W' — произведению всех чисел на границе полоски. (Аналогично определяется W' для решетки $M \times N$.)

19. Выразите $S'[U]$ и W' через X_1 и X_2 для полоски 1×2. Найдите $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$ и $\mathrm{E}(W')$.

20. a) Докажите, что математическое ожидание случайной величины X на M равно $\sum\limits_{m \in M} X(m)/|M|$.

b) Докажите, что если $\mathrm{E}(X) \leqslant x$, то существует $m \in M \colon X(m) \leqslant x$.

c) Случайная величина X при всех $m \in M$ принимает одно и то же значение μ. Найдите $\mathrm{E}(X)$.

d) Пусть a, b — вещественные числа, а X, Y — случайные величины. Всегда ли верно равенство $\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$?

e) А равенство $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$?

Перейдем теперь к более точной модели взаимодействия кварков (дальше мы работам уже с ней).

Солидная модель квантовой калибровочной теории

Зафиксируем число $c > 1$, называемое *константой взаимодействия*. Каждой дороге решетки $M \times N$ случайным образом сопоставим знак "+" или "−" так, что вероятность расстановки U равна

$$P[U] := \frac{c^{-S'[U]}}{\sum\limits_{\text{все расстановки } V} c^{-S'[V]}}.$$

Энергией электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии N назовем число

$$E_{M,c}(N) := -\frac{1}{M} \log_2 \mathrm{E}(W').$$

Наша цель — найти ее. (Здесь $\mathrm{E}(W')$ — это математическое ожидание случайной величины W', определенной перед задачей 19. Мы не знаем простого объяснения такой формулы для энергии.)

[5] А если выпадет 1 очко, то это "кризис", и вы теряете весь свой вклад. Кризис есть кризис.

Статистическая вероятность

В этой модели используется такое более общее определение вероятности. Пусть задано множество M и каждому $m \in M$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(m)$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Тогда *вероятностью* события A называется сумма чисел $P(m)$ по всем $m \in A$.

21. a) Для решетки 1×1 найдите вероятность каждой расстановки знаков, величины $\mathrm{E}(W')$ и $E_{1,2}(1)$.
b) То же, если разрешаются только расстановки, где на всех дорогах, кроме верхней, стоит "+".

22. Как изменится вероятность расстановки, если поменять знаки на всех дорогах из одного города?

Следующее определение обобщает ситуацию правила умножения 14 (c). Пусть сначала вероятности $P(m)$ всех элементов m множества M одинаковы. Подмножества (т. е. события) A и $B \neq \emptyset$ множества M *независимы*, если доля (т. е. вероятность) множества $A \cap B$ в B равна доле (т. е. вероятности) множества A в M. Приведём симметричную переформулировку, которая работает и для $B = \emptyset$, и для более общего определения вероятности, когда не все числа $P(m)$ равны. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Основной пример независимых подмножеств — в множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трёх её строках и подмножество клеток в последних четырёх её столбцах.

23. Независимы ли следующие подмножества, если вероятности элементов множества M одинаковы?
(a) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}= M$.
(b) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}= M$.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы при любых x_i, y_j, т. е.

$$P(\{m \in M\colon X(m) = x_i \text{ и } Y(m) = y_j\}) = P(X = x_i)P(Y = y_i).$$

24. Независимы ли случайные величины X_1 и X_2 на полоске 1×2 (см. определение перед задачей 19)?

25. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

26. (Закон площади Вильсона) Пусть $c = 2$, M и N произвольны. Найдите $\mathrm{E}(W')$ и энергию $E_{M,2}(N)$. При каких M_1, N_1, M_2, N_2 решетка $M_1 \times N_1$ дает меньшее значение $\mathrm{E}(W')$, чем решетка $M_2 \times N_2$?

27. (Удержание кварков в 2-мерном пространстве.) Конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести кварк и антикварк очень далеко друг от друга в 2-мерном пространстве?

28. Исследуйте 3-мерную решетку $N \times N \times N$ и 4-мерную решетку $N \times N \times N \times N$ с помощью компьютерной симуляции для различных $c \in [2; 3]$. Для них $S'[U]$ по-прежнему определяется как число квадратов 1×1 с нечетным числом знаков "$-$", а W' — как произведение знаков по границе одной из 2-мерных граней. Конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести кварк и антикварк очень далеко друг от друга в 3- и 4-мерном пространстве?

Геометрический взгляд на калибровочную теорию*

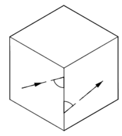
Посмотрим на нашу модель с новой стороны (этот текст неформален и далее не используется).

Заряды частиц бывают положительные и отрицательные. Какой из них считать положительным — условность: это просто выбор направления на числовой оси.

А что если выбор "направления оси" в каждой точке пространства делать независимо? Скажем, в каждом городе решетки $M \times N$ выбирать направление по-своему. Тогда для каждой дороги нужно указать, как меняется направление оси при переходе от города к соседнему. Можно представить себе ситуацию, когда при обходе квадрата 1×1 направление оси заменяется на противоположное (как направление перпендикуляра к ленте Мебиуса при ее обходе). Геометрический взгляд на калибровочную теорию состоит в том, что такие "дефектные" квадраты — это и *есть* магнитное поле, и они несут энергию. Поэтому в моделях мы считали энергию через количество "дефектных" квадратов.

Конечно, буквально эту конструкцию понимать нельзя: при обходе по замкнутому контуру знак заряда, конечно, не изменится. "Направление оси" — это нечто другое, чем знак заряда.

29. (Теорема Гаусса–Бонне) Рассмотрим a) куб; b) правильный тетраэдр; c)* выпуклый многогранник. Два вектора, лежащих в соседних гранях, назовем *параллельными*, если они образуют равные “вертикальные” углы с общей стороной этих граней (т.е. становятся параллельными и одинаково направленными, если “развернуть” две грани вокруг общей стороны, см. рисунок). Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k, f_1$ — все грани вокруг вершины v в естественном порядке. Начнем с произвольного вектора $\vec{e}_1 \subset f_1$ и возьмем вектор $\vec{e}_2 \subset f_2$ параллельный $\vec{e}_1$, потом вектор $\vec{e}_3 \subset f_3$ параллельный $\vec{e}_2$, …, наконец, вектор $\vec{e}_{k+1} \subset f_1$ параллельный $\vec{e}_k$. Обозначим через ϕ_v угол между $\vec{e}_{k+1}$ и $\vec{e}_1$. Найдите сумму углов ϕ_v по всем вершинам v.



Цвет кварка — уже не число, а вектор, для которого возможны три направления. Поэтому в теории сильного (т.е. цветового) взаимодействия на дорогах ставятся *перестановки* трех цветов.

Перестановки

Перестановка множества — запись элементов этого множества в некотором порядке. Если говорить более строго, *перестановкой* множества называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя (т. е. биекция). Перестановка множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, переводящая a_k в $f(a_k)$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix};$$

обычно $a_k = k$ для всех $k = 1, \dots, n$. *Композицией* перестановок f и g называется перестановка $f \circ g$, определённая формулой $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

30. Найдите композиции (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

31. Для любых ли двух перестановок x и y выполнено $x \circ y = y \circ x$?

Игрушечная модель неабелевой калибровочной теории

Зафиксируем число $c > 1$. Обозначим через S_3 множество всех перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. *Неподвижная точка* перестановки f — это такое $x \in \{1, 2, 3\}$, что $f(x) = x$. *След* $\mathrm{Tr}(f)$ перестановки f — это число ее неподвижных точек минус 1. Например, $\mathrm{Tr}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Каждой дороге AB решетки $M \times N$ случайным образом сопоставим перестановку $U(AB) \in S_3$ так, что $U(AB) \circ U(BA)$ — тождественная перестановка, и вероятность расстановки U равна

$$P[U] := \frac{c^{-S''[U]}}{\sum\limits_{\text{все расстановки } V} c^{-S''[V]}},$$

где

$$S''[U] := \sum_{\substack{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1\times 1 \\ \text{(вершины обозначены против часовой стрелки, начиная с левой нижней)}}} (2 - \mathrm{Tr}(U(AB) \circ U(BC) \circ U(CD) \circ U(DA))).$$

(Т.е. чем меньше элементов остаются неподвижными при обходе квадрата, тем больший вклад в $S''[U]$ он дает.) Обозначим через W'' след произведения перестановок на всех граничных дорогах, если обходить границу против часовой стрелки, начиная с левого нижнего угла. Величина $-\frac{1}{M}\log_2 \mathrm{E}(W'')$ называется *энергией сильного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии* N.

32. * a) Придумайте понятие *математического ожидания* случайной перестановки из S_3, обладающее как можно большим числом свойств математического ожидания случайной величины.

Подсказка. Нам не хватает операции *сложения* перестановок. Она появится сама собой, если вспомнить, что $1, 2, 3$ — это цвета кварков, цвета — векторы, а перестановка — отображение.

b) Найдите математическое ожидание случайной величины W'' при $c = 2$. Докажите, что для каждого $c > 1$ найдутся такие числа $a, b, B \in \mathbb{R}$, что $ba^{MN} \leqslant \mathrm{E}(W'') \leqslant Ba^{MN}$ для всех M, N.

33. *** (“Сущность” Проблемы Тысячелетия) То же неравенство для 4-мерной решетки $N \times N \times N \times N$ и прямоугольника $M \times N$ на одной из ее 2-мерных граней.

Добавка: механизм Хиггса

Рассмотрим следующую модификацию игрушечной модели калибровочной теории на стр. 3. Пусть помимо курсов обмена товарами, в каждом городе A фиксирован курс золота $H(A)$; например, 1 миллиграмм золота за апельсин (или наоборот). Путешествуя между городами, теперь разрешается не только обменивать товары, но и перевозить золото. В отличие от товаров, золото обменивается в городах, а не на дорогах, и его обмен не является обязательным.

34. Можно ли заработать, путешествуя между двумя городами A и B с курсом обмена $U(AB) = 2$ и курсами золота $H(A) = 1$, $H(B) = 4$?

Общий доход от спекуляций измеряется теперь величиной

$$S'''[U,H] = \sum_{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1\times 1} \log_2^2 U(ABCD) + \sum_{\text{все дороги } AB} \log_2^2(H(A)U(AB)H(B)^{-1}).$$

(Сумма по всем дорогам AB понимается как сумма по всем *неупорядоченным* парам соседних городов A и B. Проверьте, что от выбора направления на дороге AB соответствующее слагаемое не зависит.) Король не может менять курс золота.

35. В королевстве на рисунке на стр. 3 в центре курс покупки золота в городе C равен $H(C) = 8$, а в остальных городах равен 1. Наведите порядок в этом королевстве, т.е. найдите x, при котором общий доход от спекуляций минимален.

36. Докажите, что с помощью линейной замены переменных $x(AB)$ выражение для общего дохода от спекуляций можно привести к виду

$$S'''[x] = \sum_{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1\times 1} x(ABCD)^2 + \sum_{\text{все дороги } AB} x(AB)^2.$$

Последнее слагаемое называется *массовым слагаемым.* В этом смысле *поле Хиггса* (т.е. обмен золотом) *дает массу* калибровоному полю. Роль массы иллюстрирует такая задача.

37. Пусть курсы обмена на границе решетки $1 \times N$ такие, как в задаче 6, а курс золота в каждом городе равен 1. Стремятся ли к нулю минимальные значения $S[x]$ и $S'''[x]$ при $N \to \infty$?

Добавка: разложения сильной и слабой связи

Сложные задачи этого раздела выдаются тем, кто решил большинство из предложенных выше задач. В них всех рассматривается солидная модель калибровочной теории на кубической решетке $N \times N \times N$, как в задаче 28. Начинать решать каждую задачу предлагается со случая $N = 1$. Величина $S'[U]$ по-прежнему определяется как число квадратов 1×1 с нечетным числом знаков "$-$", а W' — как произведение знаков по границе одной из 2-мерных граней.

Начнем со случая, когда величина c очень велика (*разложение слабой связи*).

38. Найдите предел $\lim_{c\to\infty} \mathrm{E}(W')$ для каждого фиксированного N.

39. Функция $\mathrm{E}(W')$ раскладывается в ряд по степеням $1/c$, сходящийся при достаточно больших c.

40. Найдите первый и второй член в разложении $\mathrm{E}(W')$ в ряд по степеням $1/c$.

41. (Разложение слабой связи) Найдите асимптотику энергии $E_{N,c}(N)$ при $c \to \infty$, т.е. такую функцию $f_N(c)$, что $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{E_{N,c}(N)}{f_N(c)} = 1$ для каждого N.

42. (Открытая проблема) Найдите асимптотику энергии $E_{N,c}(N)$ при $N \to \infty$ и $c > 100$, т.е. такую функцию $f_c(N)$, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{E_{N,c}(N)}{f_c(N)} = 1$ для каждого $c > 100$.

Теперь рассмотрим случай, когда величина c очень близка к единице (*разложение сильной связи*, сравните с игрушечной моделью калибровочной теории).

43. Найдите $\mathrm{E}(W')$ при $c = 1$ для каждого N.

44. Представьте $\mathrm{E}(W')$ в виде отношения двух многочленов от переменной $x = \frac{c-1}{c+1}$ так, чтобы свободный член знаменателя равнялся 1 (вычислять коэффициенты в явном виде не нужно).

45. Найдите ненулевой член наименьшей степени в числителе в Вашем представлении.

46. Для ребра AB решетки и расстановки U знаков “+” и “−” на ребрах обозначим через $U(AB)$ случайную величину, равную $+1$, если на ребре AB стоит “+”, и -1, если “−”. Найдите математические ожидания случайных величин $U(AB)$, $U(AB)^2$, $U(AB)U(CD)$, $\Pi_{AB}U(AB)^{n(AB)}$, где произведение берется по всем ребрам решетки, а $n(AB)$ — заданные целые числа, сопоставленные ребрам.

47. (Разложение сильной связи) Найдите асимптотику энергии $E_{N,c}(N)$ при $c \to 1$, т.е. такую функцию $f_N(c)$, что $\lim\limits_{c\to 1} \frac{E_{N,c}(N)}{f_N(c)} = 1$ для каждого N.

48. (Открытая проблема) Найдите асимптотику энергии $E_{N,c}(N)$ при $N \to \infty$ и $1 < c < 1.01$, т.е. такую функцию $f_c(N)$, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{E_{N,c}(N)}{f_c(N)} = 1$ для каждого $1 < c < 1.01$.

Добавка: шашки Фейнмана

До сих пор мы изучали только калибровочные поля, создаваемые частицами (кварками), не обращая внимания на движение самих частиц. Теперь рассмотрим игрушечную модель движения частицы. Эта модель лучше подходит для описания электрона, а не кварка.

На бесконечной шахматной доске шашка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх. Каждому пути s шашки сопоставим вектор $\psi(s)$ на плоскости следующим образом. В начале движения этот вектор направлен вверх и имеет длину 1. Пока шашка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а как только она меняет направление движения, вектор поворачивается на $90°$ против часовой стрелки (независимо от того, в какую сторону повернула шашка). Конечное положение вектора — это и есть $\psi(s)$. Обозначим $\psi(x,t) := \sum_s \psi(s)$, где суммирование ведется по всем путям шашки из клетки $(0,0)$ в клетку (x,t). Число

$$P(x,t) := \frac{|\psi(x,t)|^2}{\sum_y |\psi(y,t)|^2}$$

называется *вероятностью обнаружения электрона в точке x в момент времени t, если электрон был испущен из точки 0 в момент времени 0.*

49. Для каждого целого x найдите $\psi(x,3)$ и вероятность $P(x,3)$.

50. (Двухщелевой эксперимент) *Вероятность обнаружения электрона $P(x,t; s \not\ni (x',t'))$ при поглощении в клетке (x',t')* определяется аналогично $P(x,t)$, только суммирование производится по путям s, не проходящим через (x',t'), и в самом конце дробь домножается $1 - P(x',t')$. Верно ли, что $P(x,t) = P(x,t; s \not\ni (1,1)) + P(x,t; s \not\ni (-1,1))$?

51. a) Найдите $\psi(0,10)$.

b) Определим $\psi_+(x,t) := \sum_s \psi(s)$, где суммирование ведется только по таким путям s шашки из $(0,0)$ в (x,t), которые заканчиваются ходом вправо-вверх. Аналогично определим ψ_- как сумму по путям, которые заканчиваются ходом влево-вверх. Выразите $\psi_+(x,t)$ и $\psi_-(x,t)$ через $\psi_+(x,t-1)$ и $\psi_-(x,t-1)$. (Физический смысл: электрон удобно рассматривать как находящийся в одном из состояний — движения вправо-вверх или влево-вверх.)

52. Постройте графики функций $f_t(x) = P(x,t)$ для разных t, вычислив их значения на компьютере и соединив каждую пару точек $(x, f_t(x))$ и $(x+1, f_t(x+1))$ графика отрезком.

53.* Найдите явную формулу для проекции $r(x,t)$ вектора $\psi(x,t)$ на горизонтальную ось (в ответе можно использовать сумму t слагаемых).

54.* Найдите “асимптотику” проекции $r(0,t)$ вектора $\psi(0,t)$ на горизонтальную ось при $t \to \infty$, т.е. явно предъявите функцию $f(t)$, такую что

$$2^{-t/2}\sqrt{t} \cdot |r(0,t) - f(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Вместо эпилога (Подводные камни)

Мы надеемся, что некоторые из наших читателей заинтересовались элементарными частицами и хотят узнать о них побольше. В качестве эпилога мы дадим несколько предупреждений таким читателям.

В научно-популярной литературе теория элементарных частиц обычно слишком упрощена. Эта подборка задач не исключение. Рассмотренные нами игрушечные модели довольно грубые, и относиться к ним стоит с некоторой долей критики. Их единственное преимущество — простота; если принимать их слишком серьезно, то они могут привести к развитию неправильной физической интуиции. Только "Солидная модель квантовой калибровочной теории" признана и действительно рассматривается в физической литературе. А для настоящего понимания теории элементарных частиц необходимо хорошее знание как физики, так и математики.

Задача, которую мы назвали "сущностью проблемы тысячелетия", ни в коем случае *не* равносильна проблеме тысячелетия в теории Янга–Миллса. И даже *не* является частным случаем последней. Это скорее наиболее содержательная — по очень субъективному мнению авторов — часть проблемы, освобожденная от технических деталей. Хотя мы и пришли к ней, обсуждая удержание кварков, по сути она ближе к другому явлению: *близкодействию ядерных сил.*

Также хотим заметить, что на сегодняшний день нет почти никаких математических результатов по калибровочной теории на решетках; обычно имеется только численное моделирование. Наконец, есть "*теории Новой Физики*", которые разрабатываются без каких-либо объективных критериев: такие теории не имеют ни экспериментального, ни математического подтверждения (а некоторые имеют экспериментальные опровержения).